Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 5

1. Der Radius R eines kugelförmigen Teilchens sei uniform verteilt auf dem Intervall $[10, 100]\mu m$, und V bezeichne das Volumen dieses Teilchens.

a) Berechne den Erwartungswert von V.

b) Berechne die Dichte von V.

Wir nehmen nun an, der Radius R sei *lognormal* verteilt (eine Zufallsvariable Y heisst lognormal verteilt, falls $\log Y$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist).

c) Zeige: Wenn R lognormal verteilt ist, dann ist auch V lognormal verteilt.

2. Aufgrund langjähriger Untersuchungen ist bekannt, dass der Bleigehalt X in einer Bodenprobe annähernd normalverteilt ist. Ausserdem weiss man, dass der Erwartungswert 32 ppb (parts per billion) beträgt und dass die Standardabweichung 6 ppb beträgt.

a) Mache eine Skizze der Dichte von X und zeichne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe zwischen 26 und 38 ppb Blei enthält, in die Skizze ein.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 40 ppb Blei enthält?

Hinweis: Gehe zur standardisierten Zufallsvariablen Z über und benutze die Tabelle der Standardnormalverteilung.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 27 ppb Blei enthält?

d) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.5% unterschritten? Das heisst, bestimme dasjenige c, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Bleigehalt kleiner oder gleich c ist, genau 97.5% beträgt.

e) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% unterschritten?

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die in Aufgabe a) eingezeichnet wurde?

3. **a)** Sei X eine $Exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X]$.

b) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\,x\,e^{x(1-x)-y} & \text{für } 0 \le x \le y\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte f_X der Randverteilung von X.

c) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 \le x \le y \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $E[XY]$.

4. Welche der untenstehenden Aussagen ist **richtig**? Begründe deine Antwort.

a) Es gilt $P[X > t+s \mid X > s] = P[X > t]$ für alle $t, s \ge 0$, falls

1. $X \sim \mathcal{U}(a,b)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
3. $X \sim Exp(\lambda)$.

b) Sei $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$. Was gilt dann für $\Phi(-t)$?

1. $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.
2. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.
3. $\Phi(-t) = \Phi(t)$.

c) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Y eine Zufallsvariable, sodass $X+Y \sim \mathcal{N}(1,6)$. Berechne $E[Y]$.

1. $E[Y] = 0$.
2. $E[Y] = 2$.
3. $E[Y] = 1$.

d) Die Dichte einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} c + x & \text{falls } -\frac{c}{2} \le x \le 0, \\ c - x & \text{falls } 0 \le x \le \frac{c}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Konstante c.

1. $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. $c = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

e) Wir betrachten die Verteilungsfunktion $F_X(t)$ für die Zufallsvariable X aus **d)**. Dann gilt:

1. $F_X(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2}$ für $t \leq 0$.
2. $F_X(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{2}$ für $t \geq 0$.
3. Weder 1. noch 2. trifft zu.

f) Sei $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Was gilt dann für $\varphi(-t)$?

1. $\varphi(-t) = -\varphi(t)$.
2. $\varphi(-t) = 1 - \varphi(t)$.
3. $\varphi(-t) = \varphi(t)$.